由感性认识到理性认识

——透析一类搏弈游戏的解答过程

由感性认识到理性认识

——透析一类搏弈游戏的解答过程

一、游戏

🗎 游戏 A：

🗎 甲乙两人面对若干堆石子，其中每一堆石子的数目可以任意确定。例如图 1 所示的初始局面：共 n=3 堆，其中第一堆的石子数 a_1=3，第二堆石子数 a_2=3，第三堆石子数 a_3=1。两人轮流按下列规则取走一些石子，游戏的规则如下：

- 每一步应取走至少一枚石子；
- 每一步只能从某一堆中取走部分或全部石子；
- 如果谁无法按规则取子，谁就是输家。

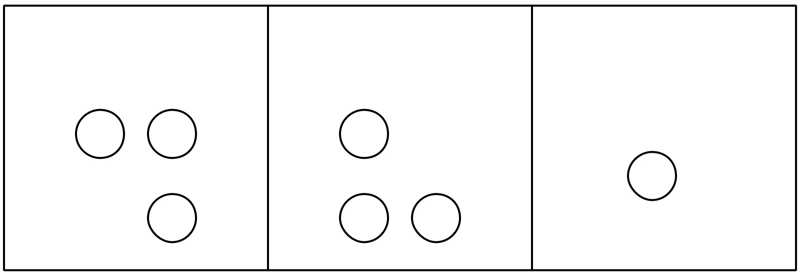


图 1 游戏的一个初始局面

🗎 游戏 B：

- 甲乙双方事先约定一个数 m，并且每次取石子的数目不能超过 m 个；
- 其余规则同游戏 A。

我们关心的是，对于一个初始局面，究竟是先行者（甲）有必胜策略，还是后行者（乙）有必胜策略。

下面，我们从简单入手，先来研究研究这个游戏的一些性质。

二、从简单入手

☞ **用一个 n 元组(a_1, a_2, …, a_n)，来描述游戏过程中的一个局面。**

☝ 可以用 3 元组(3, 3, 1)来描述图 1 所示的局面。

✍ **改变这个 n 元组中数的顺序，仍然代表同一个局面。**

☝ (3, 3, 1)和(1, 3, 3)，可以看作是同一个局面。

✍ 如果初始局面只有一堆石子，则甲有必胜策略。

📖 甲可以一次把这一堆石子全部取完，这样乙就无石子可取了。

✍ 如果初始局面有两堆石子，而且这两堆石子的数目相等，则乙有必胜策略。

📖 因为有两堆石子，所以甲无法一次取完；

📖 如果甲在一堆中取若干石子，乙便在另一堆中取同样数目的石子；

📖 根据对称性，在甲取了石子之后，乙总有石子可取；

📖 石子总数一直在减少，最后必定是甲无石子可取。

☝ 对于初始局面(1)，甲有必胜策略，而初始局面(3, 3)，乙有必胜策略。

☞ **局面的加法：$(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_m) = (a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_m)$。**

☝ (3) + (3) + (1) = (3, 3) + (1) = (3, 3, 1)。

☞ **对于局面 A, B, S，若 S=A+B，则称局面 S 可以分解为“子局面”A 和 B。**

☝ 局面(3, 3, 1)可以分解为(3, 3)和(1)。

✍ 如果初始局面可以分成两个相同的“子局面”，则乙有必胜策略。

📖 设初始局面 S=A+A，想象有两个桌子，每个桌子上放一个 A 局面；

📖 若甲在一个桌子中取石子，则乙在另一个桌子中对称的取石子；

📖 根据对称性，在甲取了石子之后，乙总有石子可取；

📖 石子总数一直在减少，最后必定是甲无石子可取。

☝ 初始局面(2, 2, 5, 5, 5, 5, 7, 7)，可以分成两个(2, 5, 5, 7)，故乙有必胜策略。

☞ **对于局面 S，若先行者有必胜策略，则称“S 胜”。**

☞ **对于局面 S，若后行者有必胜策略，则称“S 负”。**

- 若 A=(1)，B=(3, 3)，C=(2, 2, 5, 5, 5, 5, 7, 7)，则 A 胜，B 负，C 负。
- 我们所关心的，就是如何判断局面的胜负。

✍ **如果局面 S 胜，则必存在取子的方法 S→T，且 T 负。**

✍ **如果局面 S 负，则对于任意取子方法 S→T，有 T 胜。**

设初始局面 S 可以分解成两个子局面 A 和 B**（分解理论）**。

- ✍ **若 A 和 B 一胜一负，则 S 胜。**
  - 不妨设 A 胜 B 负；
  - 想象有两个桌子 A 和 B，桌子上分别放着 A 局面和 B 局面；
  - 因为 A 胜，所以甲可以保证取桌子 A 上的最后一个石子；
  - 与此同时，甲还可以保证在桌子 B 中走第一步的是乙；
  - 因为 B 负，所以甲还可以保证取桌子 B 中的最后一个石子；
  - 综上所述，甲可以保证两个桌子上的最后一个石子都由自己取得。
- ✍ **若 A 负 B 负，则 S 负。**
  - 无论甲先从 A 中取，还是先从 B 中取，都会变成一胜一负的局面；
  - 因此，乙面临的局面总是“胜”局面，故甲面临的 S 是“负”局面。
- ✍ 若 B 负，则 S 的胜负情况与 A 的胜负情况相同。
- ✍ **若 A 胜 B 胜，则有时 S 胜，有时 S 负。**

✍ 如果 S=A+C+C，则 S 的胜负情况与 A 相同。

📖 令 B=C+C，则 S=A+B 且 B 负，故 S 的胜负情况与 A 相同。

☝ 图 1 所示的初始局面(3, 3, 1) = (3) + (3) + (1)，与局面(1)的胜负情况相同。

☝ 图 1 中所示的初始局面(3, 3, 1)是“胜”局面，甲有必胜策略。

☞ 称一个石子也没有的局面为“空局面”。

✍ 空局面是“负”局面。

☞ 如果局面 S 中，存在两堆石子，它们的数目相等。用 T 表示从 S 中把这两堆石子拿掉之后的局面，则称“S 可以简化为 T”。

☝ 局面(2, 2, 2, 7, 9, 9)可以简化为(2, 2, 2, 7)，还可以进一步简化为(2, 7)。

✍ 一个局面的胜负情况，与其简化后的局面相同。

☝ 三个局面(2, 2, 2, 7, 9, 9)、(2, 2, 2, 7)和(2, 7)，胜负情况都相同。

☞ 不能简化的局面称为“最简局面”。

☝ 局面 (2, 7)是最简局面。

✍ 最简局面中不会有两堆相同的石子，故可以用一个集合来表示最简局面。

☝ 最简局面(2, 7)可以用集合{2, 7}来表示。

✉ **如果只关心局面的胜负，则一个局面可以用一个集合来描述。**

☝ 图 1 所示的局面(3, 3, 1)，可以用集合{1}来描述。

如果用搜索（搏弈树）的方法来解这个游戏，则采用集合来表示一个局面，比采用多元组来表示一个局面，搜索量将有所减少，但时间复杂度仍然很高。

能不能进一步简化一个局面的表示呢？

三、类比与联想

- 二进制加法[1]
  - 1 + 0 = 1；
  - 0 + 1 = 1；
  - 0 + 0 = 0；
  - 1 + 1 = 0。

- 二进制的加法 VS 局面的加法
  - 大写字母 AB 表示局面，小写字母 ab 表示二进制
  - 若 A 和 B 相同，则 A+B 负；若 a 和 b 相等，则 a+b=0
  - 若 A 胜 B 负，则 A+B 胜；若 a=1 且 b=0，则 a+b=1
  - 若 B 胜 A 负，则 A+B 胜；若 b=1 且 a=0，则 a+b=1
  - 若 A 负 B 负，则 A+B 负；若 a=0 且 b=0，则 a+b=0
  - ……

- 如果用二进制 1 和 0，分别表示一个局面的胜或负
- 局面的加法，与二进制的加法有很多类似之处。
  - ✗ 若 A 胜 B 胜，则 A+B 有时胜，有时负；若 a=1 且 b=1，则 a+b=0。

[1] 本文的“二进制加法”，是指不进位的二进制加法，也可以理解为逻辑里的“异或”操作。

☞ **二进制数的加法：对二进制数的每一位，都采用二进制的加法。**

☝ ， 。

🗎 二进制数的加法 VS 局面的加法

- 大写字母 AB 表示局面，小写字母 ab 表示二进制数
- 若 A 和 B 相同，则 A+B 负；若 a 和 b 相等，则 a+b 为 0
- 若 A 胜 B 负，则 A+B 胜；若 a≠0 且 b=0，则 a+b≠0
- 若 B 胜 A 负，则 A+B 胜；若 b≠0 且 a=0，则 a+b≠0
- 若 A 负 B 负，则 A+B 负；若 a=0 且 b=0，则 a+b=0
- 若 A 胜 B 胜，则 A+B 有时胜，有时负；若 a≠0 且 b≠0，则有时 a+b≠0，有时 a+b=0
- ……

☪ 如果用二进制数 s 来表示一个局面 S 的胜或负，S 胜则 s≠0，S 负则 s=0

✍ 局面的加法，与二进制数的加法，性质完全相同。

☪ **能否用一个二进制数，来表示一个局面呢？**

☞ **用符号#S，表示局面 S 所对应的二进制数。**

☪ 如果局面 S 只有一堆石子，则用这一堆石子数目所对应的二进制数来表示 S。

☝ #(5)=5=101。

☪ **若局面 S=A+B，则#S=#A+#B。**

- 局面(3, 3)=(3)+(3)，所以#(3, 3)=#(3)+#(3)=11+11=0。
- 局面(3, 3, 1)=(3, 3)+(1)，所以#(3, 3, 1)=#(3, 3)+#(1)=0+1=1。

函数 f：若局面 S 只有一堆石子，设 S={a_1}，则 f(a_1)=#S，即 f(a_1)=#(a_1)。

- 对于游戏 A 来说，#(5)=101，所以 f(5)=101。
- 对于游戏 A 来说，f(x)就是 x 所对应的二进制数。换句话说，f(x)=x。

设局面 S=(a_1, a_2, …, a_n)，即 S=(a_1)+(a_2)+…+(a_n)，则#S=f(a_1)+f(a_2)+…+f(a_n)。

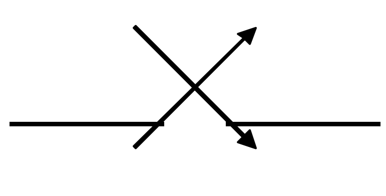
- #(3, 3, 1)=#((3)+(3)+(1))=#(3)+#(3)+#(1)=f(3)+f(3)+f(1)=11+11+1=1。

对于局面 S，若#S=0，则 S 负；若#S≠0，则 S 胜。

四、证明

二进制数 a, b，若 a + b = 0，当且仅当 a = b。

二进制数 a, b, s，若 a + b = s，则 a = b + s。



- 二进制数 $a_1+a_2+\ldots+a_n=p\neq0$，则必存在 k，使得 $a_k+p<a_k$。
  - 因为 $p\neq0$，所以 p 的最高位是 1；
  - 设 p 的最高位是第 q 位；
  - 至少存在一个 k，使得 a_k 的第 q 位也是 1；
  - a_k+p 的第 q 位为 0，所以 $a_k+p<a_k$。

0	
1	1
0	1
1	0

- **若#S=0，则无论先行者如何取子 S→T，都有#T≠0。**
  - 先行者只能从某一堆中取若干石子，不妨设他选择的就是第 1 堆；
  - 设先行者从第 1 堆中取了 x 个石子，用 T 表示取完之后的局面；
  - 设 $S=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$，则 $T=(a_1-x, a_2, \ldots, a_n)$；
  - $\#S=f(a_1)+\#(a_2, \ldots, a_n)=0$，故 $f(a_1)=\#(a_2, \ldots, a_n)$；
  - $\#T=f(a_1-x)+\#(a_2, \ldots, a_n)=f(a_1-x)+f(a_1)$；
  - $x>0\rightarrow f(a_1)\neq f(a_1-x)\rightarrow f(a_1)+f(a_1-x)\neq0\rightarrow\#T\neq0$。

a_1	a_1	x a_1
a_2		
a_3	$a_2+a_3+a_4$ a_1	a_1
a_4		

若#S≠0，则先行者必然存在一种取子方法 S→T，且#T=0。

- 设 $S=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$，$p=\#S=f(a_1)+f(a_2)+\ldots+f(a_n)$；
- 因为 $p\neq 0$，所以必然存在 k，使得 $f(a_k)+p<f(a_k)$，不妨设 $k=1$，$f(a_1)+p=x$；
- 先行者将第 1 堆的石子的数目从 a_1 变成 x，用 T 表示这个局面；
- $p=\#S=f(a_1)+\#(a_2, \ldots, a_n)$， 故$\#(a_2, \ldots, a_n)=f(a_1)+p=x$；
- $\#T=f(x)+\#(a_2, \ldots, a_n)=f(x)+x=0$。

a_1	a_1	x
a_2		
a_3	x $a_2+a_3+a_4$ a_1+p a_1	x
a_4		

若 S 是空局面，则#S=0。

若#S=0，则 S 负；若#S≠0，则 S 胜。

- #(1, 2, 3)=01+10+11=0，故局面(1, 2, 3)负。
- #(1, 2, 3, 4)=001+010+011+100=100，故局面(1, 2, 3, 4)胜。

对于游戏 A 来说，任意的一个初始局面 $S=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$，我们把这里的 a_i 都看成是二进制数。令$\#S=a_1+a_2+\ldots+a_n$。若#S≠0，则先行者（甲）有必胜策略;否则#S=0，这时后行者（乙）有必胜策略。

下面把这个结论推广到游戏 B。

☞ 函数 f：$f(x)=x \bmod (m+1)$；把函数 f 的值看作是二进制数。

☞ 对于任意初始局面 $S=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$，令 $\#S=f(a_1)+f(a_2)+\ldots+f(a_n)$。

✍ 若 $\#S\neq 0$，则先行者（甲）有必胜策略；否则后行者（乙）有必胜策略。

📖 类似游戏 A 的证明。

🗎 游戏 B 的解法与游戏 A 十分类似。这是因为两个游戏的规则相当类似。

五、推广

🗎 游戏 C：

🗎 甲乙两人面对若干排石子，其中每一排石子的数目可以任意确定。例如图 2 所示的初始局面：共 n=3 排，其中第一排的石子数 $a_1=7$，第二排石子数 $a_2=3$，第三排石子数 $a_3=3$。两人轮流按下列规则取走一些石子，游戏的规则如下：

- 每一步必须从某一排中取走两枚石子；
- 这两枚石子必须是紧紧挨着的；
- 如果谁无法按规则取子，谁就是输家。

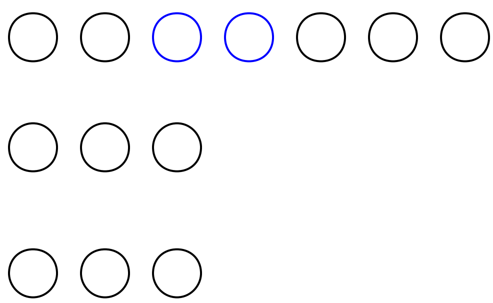


图 2 游戏的一个初始局面

☝ 如果甲第一步选择取第一排 34 这两枚石子，之后无论是甲还是乙，都不能一次取走 25 这两枚石子。换句话说，如果取了 34 这两枚石子，等价于将第一排分成了两排，这两排分别有 2 个和 3 个石子。

我们只关心，对于一个初始局面，究竟是先行者（甲）有必胜策略，还是后行者（乙）有必胜策略。

游戏 C 的规则和游戏 A 并不那么相似。但是，前面所列出的，游戏 A 的关键性质，游戏 C 却都具有。比如说，图 2 所示的初始局面可以用三元组(7, 3, 3)来表示，它的胜负情况与初始局面(7)相同。

游戏 A 的解答是由它的性质得出来的。因此，我们猜想游戏 C 是否也能用类似的方法来解。

六、精华

- 回忆游戏 A 的结论，以及它在游戏 B 上的推广，对于游戏 C，我们的想法是

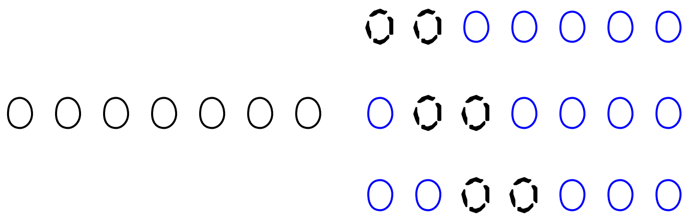
- 设计一个函数 f，把函数 f 的值看作是二进制数。对于任意一个初始局面 S，设 $S=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$，令 $\#S=f(a_1)+f(a_2)+\ldots+f(a_n)$。若 $\#S\neq0$，则先行者（甲）有必胜策略；否则 $\#S=0$，这时后行者（乙）有必胜策略。
  - 游戏 A 中，$f(x) = x$。
  - 游戏 B 中，$f(x) = x \bmod (m + 1)$。
  - 游戏 C 中，$f(x) = ?$。

- **关键就在于如何构造一个满足要求的函数 f。**

- 回忆关于游戏 A、B 的结论的证明过程

- **函数 f 是否满足要求，关键在于#S 是否满足下面的条件。**
  - **若 $\#S=0$，则无论先行者如何取子 $S\rightarrow T$，都有 $\#T\neq0$。**
  - **若 $\#S\neq0$，则先行者必然存在一种取子方法 $S\rightarrow T$，且 $\#T=0$。**

- **用符号$(x)，表示局面(x)的下一步所有可能出现的局面的集合。**
  - 在游戏 A 中，$(3)={(2), (1), (0)}。
  - 在游戏 B 中，若 m=4，则$(9)={(8), (7), (6), (5)}，$(2)={(1), (0)}。
  - 在游戏 C 中，$(7)={(5), (1, 4), (2, 3)}。
- **定义集合 g(x)：设$(x)={$S_1$, S_2, …, S_k}，则 g(x)={#S_1, #S_2, …, #S_k}。**
  - 在游戏 A 中，$(3)={(2), (1), (0)}，故 g(3)={#(2), #(1), #(0)}={10, 01, 00}。
  - 在游戏 B 中，若 m=4，则 g(9)={#(8), #(7), #(6), #(5)}，g(2)={#(1), #(0)}。
  - 在游戏 C 中，g(7)={#(5), #(1, 4), #(2, 3)}。



-

- **若#S=0，则无论先行者如何取子 S→T，都有#T≠0。**
  - 设 S=(a_1, a_2, …, a_n)，由于先行者只能选择一堆石子，不妨设选择了 a_1；
  - 因为#S=f(a_1)+#(a_2, …, a_n)=0，所以 f(a_1)=#(a_2, …, a_n)；
  - 先行者可能将局面(a_1)变为局面(b_1, …, b_m)，#(b_1, …, b_m)属于集合 g(a_1)；
  - 设这时的局面为 T，我们有 T=(b_1, …, b_m)+(a_2, …, a_n)；
  - #T=#(b_1, …, b_m)+#(a_2, …, a_n)=#(b_1, …, b_m)+f(a_1)；
  - 如果要求#T≠0，则必然有#(b_1, …, b_m)≠f(a_1)；
  - **因此，函数 f(a_1)的值，不属于集合 g(a_1)。（充要）**

$f(a_1)$	$f(a_1)$	$\#(b_1, b_2, \ldots, b_m)$
$f(a_2)$		
$f(a_3)$	$f(a_1)$	$f(a_1)$
$f(a_4)$		

➢ 若$\#S\neq 0$，则先行者必然存在一种取子方法 $S\rightarrow T$，且$\#T=0$。

- 设 $S=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$，$p=\#S=f(a_1)+f(a_2)+\ldots+f(a_n)$；
- 因为 $p\neq 0$，所以必然存在 k，使得 $f(a_k)+p<f(a_k)$，不妨设 $k=1$，$f(a_1)+p=x$；
- 因为 $p=\#S=f(a_1)+\#(a_2, \ldots, a_n)$，故$(a_2, \ldots, a_n)=p+f(a_1)=x$；
- 如果先行者把局面(a_1)变为局面$(b_1, \ldots, b_m)$，$\#(b_1, \ldots, b_m)$属于集合 $g(a_1)$；
- 设这时的局面为 T，我们有 $T=(b_1, \ldots, b_m)+(a_2, \ldots, a_n)$；
- $\#T=\#(b_1, \ldots, b_m)+\#(a_2, \ldots, a_n)=\#(b_1, \ldots, b_m)+x$；
- 如果要使$\#T=0$，相当于要找到$(b_1, \ldots, b_m)$，使得$\#(b_1, \ldots, b_m)$等于 x；
- 如果可以保证 x 属于集合 $g(a_1)$，则肯定可以找到相应的的$(b_1, \ldots, b_m)$；
- 因为 $x<f(a_1)$，所以，x 属于集合$\{0, 1, \ldots, f(a_1)-1\}$；
- **如果集合 $g(a_1)$包含集合$\{0, 1, \ldots, f(a_1)-1\}$，则 x 一定属于 $g(a_1)$。（充分）**

$f(a_1)$	$f(a_1)$	$\#(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ x
$f(a_2)$		
$f(a_3)$	x $f(a_1)+p$ $f(a_1)$	x
$f(a_4)$		

函数 f 满足要求的一个充分条件

- **$f(a_1)$不属于集合 $g(a_1)$。**
- **集合 $g(a_1)$包含集合$\{0, 1, \ldots, f(a_1)-1\}$。**

如果 $g(a_1)=\{0, 1, 2, 5, 7, 8, 9\}$，则 $f(a_1)=3$，满足要求。

用大写字母 N 表示非负整数集，即 $N=\{0, 1, 2, \ldots\}$。

令 N 为全集，集合 G(x)表示集合 g(x)的补集。

定义函数 f(n)：$f(n)=\min\{G(n)\}$，即 f(n)等于集合 G(n)中的最小数。

设局面 $S=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$，$\#S=f(a_1)+f(a_2)+\ldots+f(a_n)$，采用二进制数的加法。

若#S=0，则 S 负；若#S≠0，则 S 胜。

游戏 C 的 f 值：

- $g(0)=\{\}$，$G(0)=\{0, 1, \ldots\}$，$f(0)=0$；
- $g(1)=\{\}$，$G(1)=\{0, 1, \ldots\}$，$f(1)=0$；
- $g(2)=\{\#(0)\}=\{f(0)\}=\{0\}$，$G(2)=\{1, 2, \ldots\}$，$f(2)=1$；
- $g(3)=\{\#(1)\}=\{f(1)\}=\{0\}$，$G(2)=\{1, 2, \ldots\}$，$f(3)=1$；
- $g(4)=\{\#(2), \#(1, 1)\}=\{f(2), f(1)+f(1)\}=\{1, 0\}$，$G(4)=\{2, 3, \ldots\}$，$f(4)=2$；
- $g(5)=\{\#(3), \#(1, 2)\}=\{f(3), f(1)+f(2)\}=\{1, 1\}$，$G(5)=\{0, 2, 3, \ldots\}$，$f(5)=0$；
- $g(6)=\{\#(4), \#(1, 4), \#(2, 2)\}=\{2, 1, 0\}$，$G(6)=\{3, 4, \ldots\}$，$f(6)=3$；
- $g(7)=\{\#(4), \#(1, 4), \#(2, 3)\}=\{2, 2, 0\}$，$G(7)=\{1, 3, 4, \ldots\}$，$f(7)=1$；

图 2 所示的局面 $S=(7, 3, 3)$，有$\#S=f(7)+f(3)+f(3)=1+1+1=1$，故 S 胜。

游戏 C 的初始局面 $S=(3, 4, 6)$，有$\#S=1+2+3=01+10+11=0$，故 S 负。

七、结论

此类搏弈游戏的一般性解法：

- 用一个 n 元组$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$，来描述游戏过程中的一个局面。
- 用符号#S，表示局面 S 所对应的二进制数。
- 用符号$(x)，表示局面(x)的下一步所有可能出现的局面的集合。
- 定义集合 g(x)：设$\$(x)=\{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$，则 $g(x)=\{\#S_1, \#S_2, \ldots, \#S_k\}$。
- 令非负整数集为全集，集合 G(x)表示集合 g(x)的补集。
- 定义函数 f(n)：$f(n)=\min\{G(n)\}$，即 f(n)等于集合 G(n)中的最小数。
- 设局面 $S=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$，$\#S=f(a_1)+f(a_2)+\ldots+f(a_n)$，采用二进制数的加法。

若#S≠0，则先行者有必胜策略；若#S=0，则后行者有必胜策略。

适用范围和限制条件：

- 甲乙两人取石子游戏及其类似的游戏；
- 每一步只能对某一堆石子进行操作；
- 每一步操作的限制，只与这堆石子的数目或一些常数有关；
- 操作在有限步内终止，并不会出现循环；
- 谁无法继续操作，谁就是输家。

游戏 D（POI’2000，Stripes）：

一排石子有 L 个，甲乙两人轮流从中取“紧紧挨着的”A 或 B 或 C 枚石子。谁不能取了，谁就是输家。已知 A, B, C, L，问甲乙二人谁有必胜策略。

☺ 有了前面的结论，这个游戏就难不倒我们了。

八、总结

1. 从算法优化的角度

取石子游戏属于一类典型的搏弈游戏。穷举所有的局面，理论上可以求得最优策略。但穷举的时空复杂度太高，本文所提出的解法，有效的控制了算法的时空复杂度，可以看作是对穷举法的一个优化。

优化算法的过程，可以看作是在优化局面的表示。首先，我们用一个 n 元组表示一个局面，这是很直观很容易想到的。因为我们只关心局面的胜负，于是得到了第一个性质：这个 n 元组是无序的。进一步分析发现，n 元组中如果出现两个相同的数字，则把它们消去，不影响局面的胜负。于是，我们改用集合来表示一个局面。最后，通过与二进制数的对比，又简化到用一个数来表示一个局面。

优化局面的表示，使得搜索量大大减少。那么，减少的搜索量都到哪里去了呢？举个例子，对于游戏 A 中的 5 个局面：(3, 3, 1), (1, 3, 3), (5, 5, 1), (2, 3)：

a. 采用 n 元组：这 5 个局面互不相同；

b. 采用无序 n 元组：局面(3, 3, 1)和(1, 3, 3)相同；

c. 采用集合：局面(3, 3, 1), (1, 3, 3), (5, 5, 1)都相同，可以用集合{1}表示；

d. 采用二进制数：4 个局面所对应的二进制数都是 1，故都相同。

算法的优化，本质上是**避免穷举相同的局面**，即避免重复搜索。而优化的关键，就在于“**相同局面**”的定义。

“相同局面”的定义，必须能够反映游戏的性质。我们没有简单的按照局面的胜负，来对局面归类，就是这个原因。

2. 从算法构造的角度

人们认识事物的过程中，开始只是看到了各个事物的现象。这就是认识的感性阶段。在这个阶段中，还不能作出合乎逻辑的结论。 随着研究的深入，这些感觉和印象的东西反复了多次，于是在人们的脑子里生起了一个认识过程中的突变，最后产生出合乎逻辑的结论。这就是认识的理性阶段。

人们认识事物的过程，就是由感性认识上升到理性认识的过程。具体到解这类游戏，就是要**从简单入手**。当我们遇到了一个复杂的问题，或许人人都知道从简单入手，但却并不是每个人都能从中得到一般性的规律。那么，我们究竟是如何**由浅入深**的呢？

两堆数目相等的石子——这是个很简单的局面。我们就由此入手，将一堆石子与一个子局面相类比，并得出了两个子局面相等时的结论。在此基础上，我们研究了局面的胜负和其子局面的关系，并得出结论：可以用集合来描述一个局面。但我们并没有停留在这一步，而是将局面的分解与二进制数的加法相类比，从而发现了局面与二进制数之间的关系。我们称这个过程为“**由此及彼**”。

通过分析“用集合来表示一个局面”的结论，我发现这实质上是简化了局面的表示，从而联想到能否进一步化简，比如说用一个数来表示。在解游戏 C 时，我们并不在意它与游戏 A 的规则有多大的区别，而是注意到它与游戏 A 有着相似的性质，从而想到用类似的方法解游戏 C。我们称这个过程为“**由表及里**”。

在解游戏 A 和 B 的过程中，我们积累了很多经验。但在解游戏 C 时，我们却仅仅提到了解游戏 A 和 B 的精华：构造一个函数 f。这就是“**去粗取精**”。

将局面与二进制数相类比，我们先试着把局面的胜负直接与二进制的 1 和 0 相类比。发现不妥后，再将其改为与二进制数来类比。这一步叫“**去伪存真**”。

“由此及彼、由表及里、去粗取精、去伪存真” ，这就是由感性认识上升到理性认识的关键。